Om vor Kundskab om Primtallenes Mængde mellem givne Grændser.

Af

Ludv. Oppermann.

(Meddelt i Mødet den 10de Februar 1882.)

Vor Kundskab om Primtal og sammensatte Tal har i de sidste hundrede Aar, særlig i de sidste fem og tyve Aar, gjort store Fremskridt, i én Retning endog saa store, at det vist vil vare længe, inden der gaas videre. Det er derfor vel Umagen værd nøjere at overveje, hvad der er opnaaet og hvad der billigvis endnu kan haabes opnaaet i en ikke fjern Fremtid. Disse Spørgsmaal ere Gjenstanden for følgende Meddelelse. Jeg havde — som mange af mine Kollegaer vide — vel ikke i Sinde at forelægge den før, end jeg havde havt Lejlighed til at benytte Mr. J. Glaisher's Faktortavle for den sjette Million[1]) og navnlig de lovede detaillerede Oplysninger om Primtalmængden op til 9000000; men af Hensyn til den af den math.-naturvidenskabelige Klasse foreslaaede og nu i Aften af Selskabet vedtagne mathematiske Prisopgave har jeg fundet det rettest ikke at bie længere.

Det synes naturligt, først at tage Faktortavlerne og de af dem udledte Resultater i Betragtning.

---

[1]) Denne findes endnu ikke paa det Kongelige Bibliothek, og jeg ved ikke, om den er udkommet.

Efter tidligere Arbejder af Cataldi (1603, alle Divisorer for alle Tal under 1000) og Rhonius (1659, mindste Primfaktor for de med 2 og 5 ikke delelige Tal under 24000) gav Brancker med Bistand af Pell (1668) en Tavle for mindste Primfaktor i de med 2 og 5 ikke delelige Tal under 100000, og derefter indtraadte en Standsning, der varede omtrent 100 Aar[1]). Anjema gav 1767 en Tavle over alle Divisorer for Tal under 10000, og Marci gav 1772 en Liste over Primtallene under 400000, men som den egentlige Epoche for nye Fremskridt maa dog vel helst sættes 1774, da Euler gjorde sin Indflydelse gjældende for at udvide Faktortavlen indtil 1000000 og tillige tilraadede af Tavlen ogsaa at udelade de med 3 delelige Tal. Der blev ogsaa, navnlig efter Lambert's Tilskyndelse, af flere taget fat paa Arbejdet, men uden Frugt for Almenheden; først 1811 udkom **Chernac's** Cribrum Arithmeticum, der angiver alle Primfaktorer for de Tal under 1020000, der ikke ere delelige med 2, 3 eller 5. I Mellemtiden havde Vega 1797 i andet Bind af Logarithmisch-trigonometrische Tafeln givet en Tavle for alle Primfaktorer i de med 2 3 og 5, ikke delelige Tal under 102000 samt Liste over Primtallene mellem 102000 og 400032, og Felkel 1798 i Lambert's «Supplementa tabularum logarithmicarum et trigonometricarum, curante Antonio Felkel» foruden en Faktortavle af samme Omfang som Vega's (dog med Udeladelse af den største Primfaktor) ogsaa leveret en i mange Tilfælde rettet, men dog ikke fejlfri Liste over Primtallene under 102000.

Allerede 1814 udgav **Burckhardt** Faktortavlen for den anden

[1]) Wallis regnede Brancker's Tavle efter «very exactly, (in the same method and with the same pains as if I were to Compute it a new;)» og offentliggjorde en Liste over de 29 Fejl, som ikke allerede vare angivne i Brancker's Liste over Rettelser; se Wallis's Discourse of Combinations, Alternations and Aliquot Parts, Oxford 1685, S. 135 og 136. B.'s Tavle blev 1710 optrykt i andet Bind af Harris's Lexicon Technologicum; om W.'s Rettelser kom til Nytte ved dette Optryk, ved jeg ikke.

Million (1020000—2028000), 1816 for den 3die Million (2028000—3036000), og 1817 for 1—1020000; disse Tavler ere trykte meget kompendiøst og dog overskueligt, idet hver Side for et Interval paa 9000 giver mindste Primfaktor for de med 2, 3, 5 ikke delelige Tal. Dette Arrangement og den af B. angivne Methode for Beregningen af Faktortavlen har tjent til Mønster for de senere yderligere Udvidelser af Faktortavlerne.

Derefter indtraadte igjen en Pause. Dog maa mærkes, at Gauss i et Brev til Encke af 24 Decbr. 1849 omtaler Faktortavler beroende hos Akademiet i Berlin (de vare en Gave af Crelle og omfattede 4de—6te Million), «die wie ich fürchte das Publicum nicht besitzen soll»; Gauss vedblev dog at haabe Udgivelsen, og derfor raadede han, da nogle rige Hamborgere vilde understøtte deres Bysbarn **Dase** ved at give ham Arbejde, vel til at fortsætte Beregningen af Faktortavler, men at tage Intervallet 6000000—10000000 for (Brev af 7de Decbr. 1850); af Dase's Tavler udkom den for 7de Million 1862, den for 8de 1863, den for 9de 1865; denne sidste blev efter Dase's Død fuldendt af Dr. **Rosenberg**, der før sin Død ogsaa naaede at fuldende Tavlen for den 10de Million.

Da Udgivelsen af Tavlen for 4de—6te Million endnu bestandig lod vente paa sig, og da der paa en udtrykkelig Forespørgsel af Prof. Cayley indløb det Svar fra Berliner-Akademiets Sekretær (i et Brev af 29de April 1877), at det omhandlede Manuskript ved en tidligere Lejlighed var bleven undersøgt og fundet saa unøjagtigt, «at Akademiet var overbevist om, at Offentliggjørelsen aldrig vilde være tilraadelig», begyndte **J. Glaisher** strax Beregningen af Faktortavlen for de nævnte Millioner, hjulpen af to Regnere og understøttet med Penge af den britiske Forening for Videnskabers Fremme og af det Kongelige Videnskabernes Selskab i London. Tavlen for 4de Million udkom 1879 med en Indledning, hvori der gjøres Rede for den ved Beregningen fulgte Fremgangsmaade, meddeles en meget fuldstændig Liste over Litteraturen vedkommende Faktortavler og Primtalmængde, samt detaillerede Optællinger af Primtallene i 4de Million. Tavlen for 5te Million udkom 1880, og i Indledningen findes der detaillerede Optællinger af Primtallene i denne Million. Tavlen for 6te Million skulde udkomme 1881, og saa skulde der gives detailleret Oplysning om Primtallenes Mængde og Fordeling i de 9 første Millioner, og Sammenligning mellem disse Resultater og forskjellige Formler for Primtalmængden mellem givne Grændser.

En Primtalsliste giver i Grunden den bedste Fremstilling af Primtallenes Fordeling, men at udstrække en saadan Liste til alle 9 Millioner, i hvilke der findes circa 600000 Primtal, vil paa Grund af Bekostningen neppe lade sig gjøre; derimod skulde det ikke synes umuligt at faa en fejlfri Liste over Primtallene indtil 400000 udgivet; det vil da være fordelagtigt, at hver Pille indeholder 50 Primtal, thi saa kan man strax se, hvilken Plads i Rækken ethvert Primtal har, og hvormange Primtal der findes under en hvilkensomhelst Grændse; til mit eget Brug har jeg omhyggelig rettet de af Felkel og Vega meddelte Tavler og paa forskjellig Maade indrettet dem til de angivne Øjemed.

Primtalslisten kan til en vis Grad erstattes ved Tavler, som for ikke altfor store Intervaller angive de ved Optælling fundne Primtalsmængder. Gauss har saaledes talt Primtallene i hvert Tusinde i den første Million, og desuden formaaet Goldschmidt til at optælle Primtallene i 2den og 3die Million, saa at der for hver Myriade blev angivet saavel Primtalmængden som Antallet af Hundreder med 0, 1, 2, 3 . . . Primtal. Disse Optællinger, der efter Gauss's Død bleve udgivne i andet Bind af hans Værker, ere imidlertid ikke paalidelige. **Meissel** har (se Mathematische Annalen, 2det og 3die Bind) uafhængigt af Faktortavlen beregnet Primtalmængden i hvert Tusinde i den første Million og fundet disse Resultater stemmende med en nøjagtig Optælling af de i Burckhardt's Tavle angivne Primtal, og desuden beregnet Primtalmængden under 10^7 og 10^8. Fremdeles har

J. W. L. Glaisher med stor Udholdenhed tilvejebragt paalidelige Optællinger af Primtallene indtil 3000000 og mellem 6000000 og 9000000; sine Resultater har han for hvert Hundredetusinde meddelt i 3die Bind af Proceedings of the Cambridge Philosophical Society; mere detaillerede Meddelelser kunne som anført snart ventes.

Kunne vi nu stole paa de saaledes vundne Angivelser af Primtalmængden? Ja til en vis Grad. Der er al Grund til at antage, at J. W. L. Glaishers Optællinger virkelig korrekt angive, hvormange Tal der i Faktortavlerne ere opførte som Primtal, men selve Faktortavlerne ere neppe helt fri for Fejl; J. Glaisher har fundet, at 3026279 er et Primtal, og jeg, at 1330001 er et Primtal, men Burckhardt opfører begge som sammensatte Tal. I den første Million er vel Primtalmængden i hvert Tusinde sikker, men at der indenfor et Tusinde kan findes Fejl, som ophæve hinanden, er ganske vist ikke umuligt, skjøndt meget lidt rimeligt, da Chernac's Tavle er omhyggelig prøvet af Burckhardt. Imidlertid er det dog ønskeligt, og kan vel ogsaa ventes opnaaet, at Faktortavlernes Paalidelighed prøves ud over den første Million ved direkte Beregning af Primtalmængden.

Det maa vistnok betragtes som et Held, at Meddelelsen om Beskaffenheden af Berliner-Manuskriptet for 4de til 6te Million først kom for Dagen, efter at Tavlerne for 7de til 9de Million vare beregnede; thi ellers vilde Gauss vist have raadet til, at Dase umiddelbart skulde fortsætte Burckhardts Arbejde, og saa er det tvivlsomt, om Faktortavlerne havde faaet den Udstrækning, som de nu have.

Manuskriptet af Rosenbergs Faktortavle for 10de Million har hans Enke 1878 foræret Berliner-Akademiet; man maa haabe, at Udgivelsen af samme ikke lader vente længe paa sig.

Skulde der blive Spørgsmaal om en ny Udgave af Chernac's eller Burckhardt's Tavler, saa vil det være tidsnok at overveje Ønskeligheden af enkelte Smaaforandringer

Af det foregaaende ses, at vi tør haabe inden lang Tid at være i Besiddelse af Faktortavler for de 10 første Millioner og altsaa at se vor faktiske Kundskab om Primtallenes Mængde og Fordeling udvidet til denne Grændse, vel ogsaa at se den Undersøgelse af Faktortavlernes Paalidelighed, som Meissel har foretaget med Hensyn til den første Million, fortsat til den nævnte Grændse; vi have ogsaa set, at Meissels Fremgangsmaade saa vil gjøre det muligt at beregne Primtalmængden under enhver Grændse, der ikke overstiger $10^{10 \cdot 5}$. Denne sidste Udsigt har dog, paa Grund af Regningens store Vidtløftighed, ikke synderlig Betydning; vi kunne vente os langt mere af Fortsættelse af de begyndte Undersøgelser af den Lov, der udtrykker Primtallenes Mængde i et givet Interval som Funktion af Intervallets Grændser.

Legendre var, saa vidt vides, den første, der angav en saadan (rigtignok kun tilnærmelsesvis gyldig) Lov, nemlig at Mængden af Primtal under Grændsen x tilnærmet skulde være $\frac{x}{A\,l.x - B}$, idet A og B ere Konstanter, som bestemmes ved Erfaring; han paaviste, at $A = 1$, $B = 1{\cdot}08366$ giver meget gode Resultater op til $x = 10^6$. J. W. L. Glaisher har (i 3die Bind af Proceedings of the Cambr. Philos. Soc.) vist, at naar $A = 1$, saa kan man ikke blive staaende ved at antage B konstant. Allerede 9. Marts 1877 havde jeg her i vort Selskab (i et utrykt Foredrag) gjort opmærksom paa, at naar A og B bestemmes af de Primtalmængder, som Meissel har beregnet for Grændserne 10^7 og 10^8, hvilket giver $A = 1{\cdot}0030514\frac{1}{6}$, $B = 1{\cdot}1201812\frac{4}{7}$, saa opnaas der vel langt bedre Resultater end naar $A = 1$, $B = 1{\cdot}08366$, men at man dog nødes til enten til $A\,l.x - B$ at tilføje nye Led eller at betragte A eller B (eller begge) ikke som Konstanter, men som Funktioner af x; ved samme Lejlighed meddelte jeg den endnu ikke beviste Erfaringssætning, at der, naar n er et helt Tal > 1, ligger mindst eet Primtal mellem $n(n-1)$ og n^2 og ligeledes mellem n^2 og $n(n+1)$.

Gauss havde allerede meget tidlig (ifølge en Ytring i det ovenanførte Brev til Encke vistnok før 1800) lagt Mærke til, at

Primtallenes Hyppighed i Nærheden af en given Værdi x i det hele taget er omvendt proportional med $l.x$, saa at deres Mængde indtil Grændsen x tilnærmet vil være $\int\frac{dx}{l.x}$. Hermed stemmer godt, at Bessel i det Brev (af 26de Aug. 1810), hvori han meddeler Gauss sine Undersøgelser af Integrallogarithmen, skriver: «Sie errathen leicht, mein theuerer Freund, warum ich «Ihnen diese Entwickelungen mittheile; Sie äusserten einmal «den Wunsch, die Function $li.x$ für sehr grosse x zu kennen, «um die schöne Bemerkung des Zusammenhanges mit den «Primzahlen daran prüfen zu können. Ich habe also Werthe «von $li.x$ bis zu 1000000 berechnet . . .», og denne Betydning af Integrallogarithmen omtales ogsaa paa samme Tid i Brevvexlingen mellem Bessel og Olbers, saa Gauss ikke har gjort nogen Hemmelighed af sin Opdagelse.

Der gik lang Tid, inden man kom ud over denne Iagttagelse (hvilken iøvrigt ogsaa Hargreave gjorde 1849). Det første Fremskridt skyldes **Tchebychev**, der 1848 i en til Akademiet i St. Petersborg indsendt Afhandling beviste, 1) at Funktionen $\varphi(x)$, der angiver Mængden af Primtal mindre end x, vil mellem Grændserne $x = 2$ og $x = \infty$ uendelig mange Gange tilfredsstille $\varphi(x) > \int_2^\infty \frac{dx}{l.x} - \frac{ax}{(l.x)^n}$ og $\varphi(x) < \int_2^\infty \frac{dx}{l.x} + \frac{ax}{(l.x)^n}$, hvor lille man end tager det positive Tal a og hvor stort man end tager n; 2) Udtrykket $\frac{x}{\varphi(x)} - l.x$ kan for $x = \infty$ ikke have nogen Grændseværdi forskjellig fra -1. Lidt senere (1850) gik han endnu videre; ved $\theta(x)$ betegner han Summen af de naturlige Logarithmer af alle Primtal, der ikke overskride x, og ved $\psi(x)$ Summen $\theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \theta(x^{\frac{1}{4}}) + \ldots$, samt ved T Summen af naturl. Log. til de hele Tal, der ikke overskride x; han beviser saa, at $\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots = T(x)$; ved Hjælp af denne Sætning finder han saa Grændseværdier først for $\psi(x)$ og derefter for $\theta(x)$ og for Antallet af Primtal mellem givne Grændser l og L, samt en Betingelsesligning mellem l, L og k, der maa være tilfredsstillet, saafremt Antallet af Primtal mellem l og L skal være større end k; ved saa at tage $k = 0$ naar han at bevise Bertrand's Postulat, at der, naar $n > 3$, ligger et Primtal mellem n og $2n - 2$; endelig beviser han følgende Sætning: Naar Funktionen $F(x)$ er positiv for enhver Værdi af x, der overskrider en bestemt Grændse, saa er Konvergensen af Rækken

$$\frac{F(2)}{2} + \frac{F(3)}{3} + \frac{F(4)}{4} + \frac{F(5)}{5} + \frac{F(6)}{6} + \ldots.$$

en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for Konvergensen af Rækken

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \ldots$$

i hvilken Argumenterne dannes af Primtallene større eud 1, og ved Hjælp af denne Sætning finder han først en tilnærmet Værdi for Rækken

$$\frac{1}{2\,l.2} + \frac{1}{3\,l.3} + \frac{1}{5\,l.5} + \frac{1}{7\,l.7} + \ldots$$

og derefter Grændseværdier for Antallet af de Primtal, der ikke overskride en given Grændse L. Disse to Afhandlinger findes i Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg (Savans étrangers), T. VI og VII, og ere optrykte i Liouville's Journal, 17de Bind; de i den 2den Afhandling fundne Grændsebestemmelser ere ikke snevre nok til at have praktisk Betydning.

Et langt betydeligere Fremskridt, end Tchebychev, gjorde **Riemann** 1859 i en Afhandling, som han indsendte til Berliner Akademiet, og som findes saavel i dettes Monatsberichte for 1859 som i Riemann's Mathematische Werke. Han gaar ud fra den Sætning, at Productet $\Pi\left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right)$, naar s enten er reel > 1 eller imaginær med den reelle Del > 1, og naar der for p indsættes alle Primtal, er $=$ Summen Σn^{-s}, naar heri for n indsættes alle hele Tal. Ved en genial Benyttelse af bestemte Integraler mellem imaginære Grændser udleder han heraf en Formel for Mængden af Primtal under en given Grændse. At der stilles store Fordringer til Læseren, det ligger i Sagens Natur; men af og til blive disse Fordringer unødvendigt store ved Udeladelsen af Mellemled, der ganske vist have kunnet forekomme Forfatteren selvfølgelige; strax i Begyndelsen savnes Angivelse af, om han regner 1 med blandt Primtallene eller ikke. I 3die Bind af Tortolini's Annali di Matematica har Genocchi givet en Fremstilling af Riemann's Arbeide, der paa enkelte Punkter letter Forstaaelsen.

Den Funktion, der skal angive Primtalmængden under en given Grændse, er diskontinuert, da den pludselig voxer med 1, hver Gang den variable Grændse passerer et Primtal, og saa bliver uforandret, indtil Grændsen passerer det næste Primtal. Ved $F(x)$ betegner R. Primtalmængden under enhver Værdi af x, der ikke just er et Primtal; men er x et Primtal p, saa sætter han $F(p) = \frac{F(p-0)+F(p+0)}{2}$. Ved $f(x)$ betegner han Summen $F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \frac{1}{4}F(x^{\frac{1}{4}}) + \ldots$; heraf følger, at $F(x) = \Sigma \frac{(-1)^{\mu}}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$, hvor der for m maa indsættes Rækken af hele Tal, der ikke maales af noget Kvadrat > 1, og hvor μ er Antallet af Primfaktorer i m. Da det længere hen i R.'s Afhandling viser sig, at

$$F(x) = f(x) - \tfrac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}f(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}f(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7}f(x^{\frac{1}{7}}) \ldots$$

saa synes det klart, at 1 ikke er regnet med blandt Primtallene, og at altsaa x og $x^{\frac{1}{m}}$ i disse Udtryk aldrig maa være < 2; men dette vigtige Punkt trænger til en nøjere Undersøgelse.

Foruden Funktionerne F og f benytter R. endnu to andre Funktioner, ψ og ξ, der defineres ved

$$\psi(x) = \sum_1^{\infty}\left(e^{-nn\pi x}\right), \quad \xi(t) = 4\int_1^{\infty} \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\tfrac{1}{2}t\,l.x\right)dx.$$

(Herved maa mærkes, at $\frac{1}{2} + ti = s$, og at s er et imaginært Tal, hvis reelle Del > 1.) Om Funktionen $\xi(t)$, der er endelig for alle endelige Værdier af t, bemærkes, at den, udviklet efter Potenser af tt, giver en stærkt konvergerende Række, men

Rækkeudviklingen gives ikke. Funktionen $\xi(t)$ kan kun forsvinde, naar den imaginære Del af t ligger mellem $+\frac{i}{2}$ og $-\frac{i}{2}$. Om Rødderne i Ligningen $\xi(t) = 0$ bemærkes, at Antallet af dem, hvis reelle Del ligger mellem 0 og T, omtrent er $\frac{T}{2\pi}(l.\frac{T}{2\pi} - 1)$, og at formodentlig alle Ligningens Rødder ere reelle.

Alt dette maatte anføres, for at Læseren kan forstaa Riemann's endelige Formel for Primtalmængden; han finder først, at

$$f(x) = li(x) - \Sigma^{\alpha}\left(li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + li(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{dx}{x\,l.x} + l.\xi(0),$$

naar der i Σ^{α} for α indsættes alle de Rødder i Ligningen $\xi(\alpha) = 0$, der ere positive reelle (eller indeholde en positiv reel Del), og disse Rødder ved Summeringen ordnes efter deres Størrelse; dette sidste er nødvendigt, fordi Værdien af Σ^{α} er afhængig af Leddenes Orden (men det bevises ikke). Af $f(x)$ findes saa $F(x)$ ved den ovenfor angivne Formel.

I Formlen for $f(x)$ er det første Led givet explicit som en bekjendt Funktion af x; Integrationen i 3die Led er saa let, at ogsaa dette Led kan betragtes som explicit givet (dets største Værdi, for $x = 2$, er omtrent $\frac{1}{7}$); derimod udkræves der til Bestemmelse af det konstante Led $\xi(0)$ og af det vigtige andet Led, der indeholder det diskontinuerte Element i $f(x)$, først at $\xi(t)$ udvikles i Række efter Potenser af tt, dernæst at Rødderne i Ligningen $\xi(\alpha) = 0$ bestemmes, og endelig at Beregningen af $li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)$ gjøres overkommelig. Værdien af $li(x) - f(x)$, der i mange Tilfælde let bestemmes ved de optalte Primtalmængder, giver en ret god Forestilling om Leddet Σ^{α}, og man faar ligeledes den kontinuerte Del af $F(x)$ meget nær udtrykt ved $li(x) - \frac{1}{2}li(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}li(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}li(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6}li(x^{\frac{1}{6}}) - \frac{1}{7}li(x^{\frac{1}{7}}) \ldots$, men Udførelsen heraf er meget besværlig, saavel paa Grund af Interpolationerne, som fordi man maa medtage saa mange Led; er $x = 10^8$, maa man, hvis man vil have Summen rigtig blot paa nærmeste Tiendedel, medtage alle 17 Led.

Det maa endnu bemærkes, at Genocchi er kommen til et Resultat, der afviger lidt fra Riemann's, idet han i Formlen for $f(x)$ istedetfor Constanten $l.\xi(0)$ har $l.\frac{1}{2}$; om nu virkelig $\xi(0) = \frac{1}{2}$ eller der er begaaet en lille Fejl enten af G. eller af R., det er (saa vidt mig bekjendt) endnu ikke afgjort.

Riemann har altsaa givet en Form for den Funktion, der udtrykker Primtalmængden under en given Grændse, men Begrundelsen er ikke ganske tilfredsstillende, og der er desuden endnu meget at gjøre, inden denne Form kan bruges, end sige bruges uden stort Besvær til virkelig Beregning af denne Mængde. Det maa fremdeles, saalænge det modsatte ikke er bevist, holdes for muligt, at Funktionen $F(x)$ ogsaa kan fremstilles under andre, maaske mere handelige Former, og endelig, at i det mindste den lange Hale af meget smaa Led, som besværliggjør Brugen af Formlen for $F(x)$, vistnok tilstrækkelig nøje kan findes ved en bekvem Tilnærmelse.

Beregningen af Leddet Σ^a i Formlen for $f(x)$ er af særlig Vigtighed, da det, naar x er et Primtal, lader Værdien af $F(x)$ pludselig voxe med 1, saa der her synes at kunne findes et nyt, paa meget store Tal anvendeligt Middel til at afgjøre, om et forelagt Tal er et Primtal eller ikke.

Den Omstændighed, at $F(x)$ enten er et helt Tal eller et helt Tal $+\frac{1}{2}$, giver en let Bestemmelse af den Nøjagtighed i Beregningen, der udkræves for nøjagtigt at finde Værdien af $F(x)$.